

Л.Б. Долінський

Комбінаторний аналіз спільних дефолтів позичальників

Долінський Л.Б. Комбінаторний аналіз спільних дефолтів позичальників // Моделювання та інформатизація соціально-економічного розвитку України: Зб. наук. праць – К.: ДНДІМЕ, Вип. 11, 2010. – 253 с. – с. 90-98. – 0,45 друк. арк.

Розглянуто варіанти спільного дефолту підприємств на основі аналізу їх індивідуальних (автономних) дефолтів. Запропонований комбінаторний підхід дозволяє оцінити загальну потужність множини спільних дефолтів, а також потужність відповідних підмножин, залежно від накладених додаткових умов. Розбудовано алгоритм вилучення з загальної множини можливих дефолтів комбінацій, які містять менше двох індивідуальних дефолтів.

УДК: 330.131.7: 336.777

КОМБІНАТОРНИЙ АНАЛІЗ СПІЛЬНИХ ДЕФОЛТІВ ПОЗИЧАЛЬНИКІВ

Актуальність проблеми. Останні роки були досить складними для вітчизняного фінансового ринку. Зокрема, професійні учасники ринку стикнулися з масовими відмовами позичальників щодо своєчасного та повного погашення власних боргових зобов'язань. В багатьох випадках боржникам і кредиторам вдалося досягти компромісних рішень шляхом пролонгації або реструктуризації заборгованостей. Однак, на жаль, доводиться констатувати й досить значну кількість технічних дефолтів за вітчизняними борговими інструментами, насамперед – за публічними облігаційними позиками.

На рис. 1 показано динаміку ринку корпоративних облігацій протягом 2001 – 10 місяців 2010 рр.

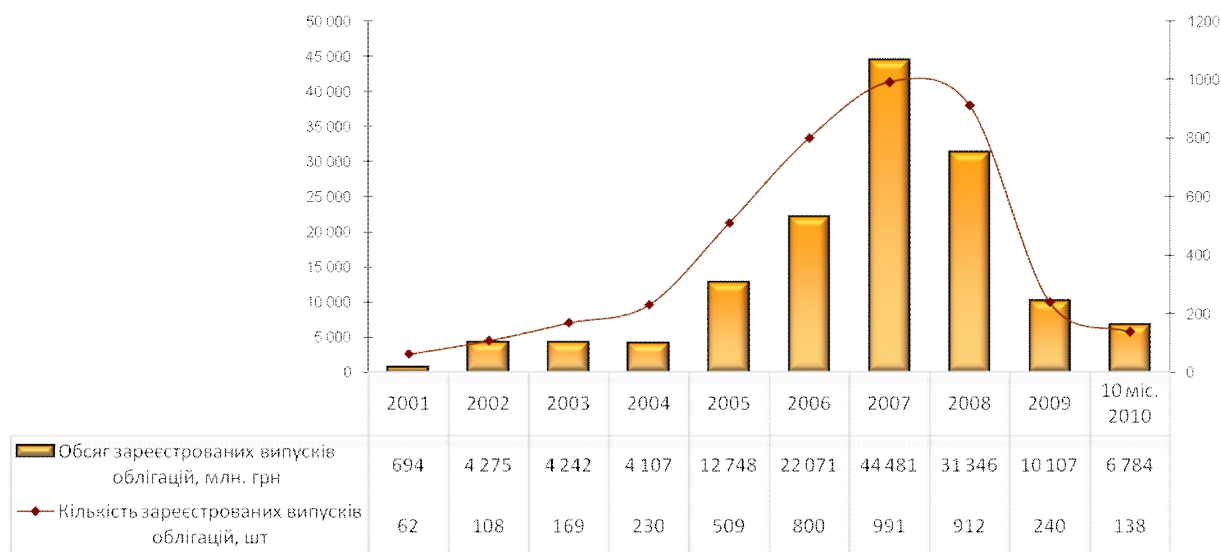


Рис. 1. Обсяг зареєстрованих випусків облігацій підприємств протягом 2001 – 10 місяців 2010 рр.

Наведений на рис. 1 графік ілюструє різні стани ринку корпоративних облігацій в Україні. Так, з 2005 року, цей сегмент вітчизняного фондового ринку почав активно розвиватися. Піком зростання став 2007 рік, коли лише обсяг зареєстрованих протягом року випусків облігацій підприємств склав майже 45 млрд. грн.

З середини 2008 року, під впливом світової фінансової кризи, обсяги ринку почали суттєво скорочуватись. За відсутності попиту на такі боргові інструменти, кількість нових облігаційних випусків значно зменшилась, а емітенти старих випусків стикнулися з необхідністю зворотного викупу власних боргових зобов'язань. Дійсно, в умовах нестачі ліквідних коштів, інституційні інвестори (насамперед – комерційні банки), які були власниками облігацій, масово скористалися правом пред'явлення цих боргових цінних паперів до дострокового викупу (оферти). Однак, емітенти облігацій в основному не були готові до такого розвитку подій та досить часто відмовлялися погашати ці боргові вимоги. Тому, в багатьох випадках було зафіксовано випадки неплатежів (дефолтів) за облігаційними позиками. В інших випадках, внаслідок того, що облігаційна позика, на відміну від класичного банківського кредиту, зазвичай є незабезпеченою, інвестори, не маючи суттєвих важелів впливу на емітентів, вимушені були шукати компроміс у вигляді реструктуризації цих боргових зобов'язань. Таким чином, випуски облігацій, які відбувалися у 2009 році, переважно носили технічний характер й були спрямовані в основному на переоформлення старих кредитних вимог. Наявні факти неплатежів спричинили зниження довіри інвесторів до облігаційних позик та, як наслідок, – зменшення їх ліквідності.

У другій половині 2010 року, експерти заговорили про поступовий вихід ринку боргових цінних паперів із кризи. На момент написання цієї статті офіційні дані щодо обсягів випуску корпоративних облігацій за весь 2010 рік ще не відомі, проте скоріш за все результати 2010 року перевищать минулорічні показники. На сьогодні відновлення ринку кредитних інструментів вже почалося, але відбуватиметься воно, на нашу думку, досить повільно, й лише за умов доведення позичальниками власної фінансової стійкості та платоспроможності.

Отже, у сучасній кредитно-інвестиційній політиці на передній план має вийти не питання дохідності, а питання надійності капіталовкладень. Тому реалії сьогодення вимагатимуть від інвестора ретельного оцінювання наявних на ринку боргових інструментів з позицій кредитного ризику та кредитоспроможності їхніх емітентів.

Оскільки важливим та інформативним показником ступеня кредитного ризику боргового інструменту є оцінка відповідної ймовірності дефолту, то

науково-практичні дослідження у сфері моделювання дефолтів є актуальними та своєчасними.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Тематика науково-практичних досліджень, пов'язана з оцінюванням дефолтів, є надзвичайно популярною на Заході. Найвідомішими працями в цьому напрямку є результати досліджень незалежних вчених під керівництвом Є. Альтмана [1], а також емпіричних досліджень, паралельно проведених «великою трійкою» міжнародних рейтингових агентств [2-4], які спиралися на значну статистику дефолтів. Разом з тим, інші, нестатистичні підходи, у працях закордонних дослідників майже не розглядаються.

Серед вітчизняних праць, в яких розглянуто питання моделювання кредитного ризику та дефолтів боргових інструментів, виокремимо сучасні дослідження А.Б. Камінського [5] та Б.Ю. Кишакевича [6].

Разом з тим, на нашу думку, питання моделювання дефолтів позичальників на українському ринку розкрито недостатньо. Причому, на наш погляд, в межах цієї тематики особливий науково-практичний інтерес становлять задачі оцінювання саме *спільних* дефолтів для пов'язаних (залежних) позичальників та боргових інструментів. Дійсно, за індивідуальними дефолтами, які траплялись на українському ринку в останні роки, явно спостерігається взаємозалежність між окремими позичальниками, станом галузі, станом економіки тощо. Саме тому важливим науково-практичним завданням є пошук загальних закономірностей щодо фінансової стійкості (надійності) позичальників та/або боргових інструментів, в тому числі – й через призму їх можливих спільних дефолтів.

Дослідження спільних дефолтів суттєво ускладнюються внаслідок існування великої кількості комбінацій індивідуальних (автономних) дефолтів в межах певної вибірки позичальників. Тому, при моделюванні та аналізі можливих варіантів спільного дефолту, на наш погляд, доцільним є попереднє оцінювання загальної кількості таких комбінацій залежно від накладених на вибірку умов.

Ціль статті – дослідити варіанти спільного дефолту позичальників методами комбінаторики з метою пошуку адекватних методик аналізу портфелю відповідних боргових зобов'язань.

Виклад основного матеріалу дослідження. Зазначимо, що ця стаття є продовженням публікацій результатів авторських досліджень у сфері моделювання дефолтів позичальників. У попередніх працях [7-8] було розглянуті питання, що пов'язані з визначенням ймовірності настання дефолту. На відміну від них, дана стаття не містить імовірнісних показників, а висвітлює комбінаторну задачу щодо перебору та аналізу всіх варіантів випадкових подій спільного дефолту позичальників.

Можна виокремити два тлумачення поняття спільного дефолту:

- одночасний дефолт декількох позичальників;
- спільна реалізація (перетин) сумісних випадкових подій дефолту декількох позичальників.

В межах цього дослідження ми вважатимемо всі спільні дефолти умовно одночасними, тобто такими, коли проміжок часу між дефолтами позичальників є дуже незначним порівняно з часовим горизонтом дослідження. Отже, в аспекті фінансового моделювання, нас цікавитиме саме дослідження сумісних випадкових подій дефолтів.

Перш ніж переходити безпосередньо до комбінаторного аналізу спільних дефолтів, уточнимо визначення терміну дефолт.

Відповідно до чинного українського законодавства *дефолт* означає, що «виплата відсотків і основної суми за борговими зобов'язаннями позичальника припинена без досягнення згоди з кредиторами щодо реструктуризації заборгованості до настання строку платежу [9]».

Слід зазначити, що в межах цього дослідження поняття дефолту розглядається дещо звужено, лише як результат фінансово-кредитної угоди, який складається з двох несумісних (альтернативних) випадкових подій: «*наявності дефолту*», тобто непогашення боргового зобов'язання, та «*відсутності дефолту*» – його погашення своєчасно та в повному обсязі.

Надійність кожного окремого боргового інструменту або кожного окремого позичальника можна описати за допомогою поняття *індивідуального* дефолту. Якщо ж аналізувати певну вибірку боргових зобов'язань або позичальників, наприклад, при оцінюванні кредитного ризику портфелю облігацій, потрібно розглядати їхні *спільні* дефолти.

Зрозуміло, що задача моделювання спільних дефолтів виникає коли одночасно аналізуються не менш ніж два позичальники. Оскільки комбінаторний аналіз вибірки з двох елементів є тривіальним, надалі розглядатиме комбінаторну задачу моделювання спільних дефолтів для більш ніж двох позичальників.

Наприклад, розглянемо випадкові події спільних дефолтів за наявності чотирьох підприємств-позичальників. Вважатимемо, що їх дефолти можуть відбутися умовно одночасно (тобто порядок настання індивідуальних дефолтів є неважливим). Тоді всі варіанти комбінацій випадкових подій наявності або відсутності дефолтів для множини підприємств-позичальників $\{A, B, C, D\}$ можна представити у вигляді табл. 1.

У загальному випадку, прийнявши, що обсяг вибірки, яка досліджується на спільні дефолти, становить n позичальників, а кількість допущених ними дефолтів становить m зафіксованих випадків, можна визначити загальну кількість комбінацій індивідуальних дефолтів. Оскільки за постановкою задачі підприємства є *розрізненими*, але порядок настання їхніх

індивідуальних дефолтів є *несуттєвим*, то випадкові події спільних дефолтів з погляду комбінаторики являють собою сполучення C_n^m .

Наприклад, кількість спільних *парних* дефолтів для сукупності з чотирьох підприємств (варіанти № 6-11, табл. 1) дорівнює $C_4^2 = 6$.

Таблиця 1. Варіанти комбінацій фінансових результатів позичальників

Варіанти комбінацій	Результат позичальника	
	Наявність дефолту	Відсутність дефолту
1	–	A, B, C, D
2	A	B, C, D
3	B	A, C, D
4	C	A, B, D
5	D	A, B, C
6	A, B	C, D
7	A, C	B, D
8	A, D	B, C
9	B, C	A, D
10	B, D	A, C
11	C, D	A, B
12	A, B, C	D
13	A, B, D	C
14	A, C, D	B
15	B, C, D	A
16	A, B, C, D	–

Загальну кількість варіантів комбінацій індивідуальних дефолтів $L(n, m)$ можна обчислити за формулою:

$$L(n, m) = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n. \quad (1)$$

За формулою (1) можна перевірити, наприклад, що вищенаведена табл. 1 міститиме $2^4 = 16$ варіантів. Причому серед них C_4^0 відповідає варіанту №1 – відсутність дефолтів, а C_4^1 відповідає варіантам №2-5 – автономний дефолт лише одного з позичальників.

Серед всіх цих комбінацій в аспекті спільних дефолтів нас цікавитимуть лише варіанти сполучень в яких кількість дефолтів $m = \overline{2, n}$, звідси *потужність множини спільних дефолтів* $L'(n, m)$ дорівнює:

$$L'(n, m) = 2^n - (C_n^0 + C_n^1) = 2^n - (n + 1). \quad (2)$$

Наведений вираз (2) дозволяє оцінити загальну кількість комбінацій випадкових подій дефолтів підприємств, які потрібно проаналізувати в аспекті спільних дефолтів. Наприклад, відповідно до табл. 1 спільним дефолтам відповідають варіанти №6-16, загальна кількість яких за формулою (2) дорівнює 11.

Потужність множини $L'(n, m)$ розрахована за умов, що спільними дефолтами вважаються всі варіанти сполучень, в яких не менше двох індивідуальних дефолтів ($m = \overline{2, n}$). Потужність цієї множини можна зменшити, якщо розглядати лише варіанти в яких кількість дефолтів $m = \overline{k, n}$, де $2 < k \leq n$. Тоді, потужність множини спільних дефолтів, кожен з яких містить не менше ніж k індивідуальних дефолтів, дорівнює:

$$L'(n, m, k) = 2^n - (C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^{k-1}) = 2^n - \sum_{i=1}^k C_n^{i-1}, \quad 2 < k \leq n. \quad (3)$$

З формули (3) випливає, що збільшення величини k зменшує потужність множини спільних дефолтів. У крайньому випадку, коли $k = n$, вираз (3) можна спростити з урахуванням виразу (1), при цьому отримавши абсолютно правильну відповідь, що кількість комбінацій дефолтів разом усіх позичальників дорівнює одиниці.

В цілому аналіз спільних дефолтів навіть відносно невеликих сукупностей підприємств, ускладнюється великою потужністю такої вибірки, яка в загальному випадку описується виразом (1). Наприклад для 10 підприємств загальна кількість комбінацій індивідуальних дефолтів дорівнюватиме $2^{10} = 1024$. Таким чином, збільшення кількості n не дозволить перебрати всі варіанти, як в умовному прикладі для чотирьох позичальників, а вимагатиме чіткої алгоритмізації процесу переходу від загальної множини комбінацій автономних дефолтів, кількість яких описується формулою (1), до матриці спільних дефолтів відповідно до виразів (2)-(3).

З метою виключення із загальної сукупності сполучень індивідуальних дефолтів варіантів повної відсутності дефолтів та наявності лише одного дефолту, як показано у формулі (2), пропонуємо наступний спосіб.

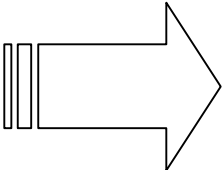
Випадкові події наявності або відсутності дефолту для кожного окремого підприємства можна описати бінарною (альтернативною) дискретною випадковою величиною X . Ця бінарна змінна являтиме собою індикатор появи випадкової події дефолту та прийматиме такі значення:

$$X = \begin{cases} 1, & \text{коли дефолт відбувся;} \\ 0, & \text{коли дефолт не відбувся.} \end{cases}$$

Тоді, всі сполучення індивідуальних дефолтів підприємств-позичальників можна закодувати бінарним кодом. Наприклад, для чотирьох підприємств з табл. 1 варіант №1 повної відсутності дефолтів описуватиметься величиною $\{0\ 0\ 0\ 0\}$, а варіант №2 наявності лише одного дефолту можна записати як $\{0\ 0\ 0\ 1\}$.

Як бачимо, варіанту №1 з табл. 1 відповідає двійковий запис десяткового числа «0», а варіанту №2 – числа «1». Отже, табл. 1 для 4-х підприємств можна переписати у вигляді бінарного коду, перенумерувавши варіанти не від «1» до «16», а від «0» до «15» у десятковому численні. Отриманий результат представлений масивом Q на рис. 2.

0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
4	0	1	0	0
5	0	1	0	1
6	0	1	1	0
7	0	1	1	1
8	1	0	0	0
9	1	0	0	1
10	1	0	1	0
11	1	0	1	1
12	1	1	0	0
13	1	1	0	1
14	1	1	1	0
15	1	1	1	1



3	0	0	1	1
5	0	1	0	1
6	0	1	1	0
7	0	1	1	1
9	1	0	0	1
10	1	0	1	0
11	1	0	1	1
12	1	1	0	0
13	1	1	0	1
14	1	1	1	0
15	1	1	1	1

Масив Q
Масив Q'

Рис. 2. Масиви даних щодо індивідуальних дефолтів позичальників

Тут необхідно зазначити, що запис індивідуальних дефолтів підприємств у вигляді бінарного коду позбавляє цю множину дефолтів ознаки *розрізненості* позичальників. Наприклад, другий рядок $\{0\ 0\ 0\ 1\}$ матриці Q можна вважати автономним дефолтом підприємства A , а можна – автономним дефолтом підприємства D , це залежить лише від прийнятого порядку запису бінарних випадкових величин X_i , якими описується відповідний індивідуальний дефолт i -того підприємства.

З метою аналізу спільних дефолтів, з матриці Q необхідно виключити рядки, які містять менше двох індивідуальних дефолтів, у відповідності з формулою (2). Аналіз масиву даних Q показав, що таким рядкам відповідають десяткові числа, які кратні цифрі «2». Так для 4-х підприємств з матриці Q потрібно виключити рядки, які відповідають десятковим числам $2^0, 2^1, 2^2, 2^3$. В результаті отримаємо матрицю спільних дефолтів Q' (рис. 2).

В загальному випадку матриця Q має розмірність $2^n \times n$. Матрицю Q' можна отримати з матриці Q шляхом викреслювання з останньої рядки з двійковим кодом десяткових чисел 2^γ , де $\gamma \in [0; n-1]$. Результатом реалізації даного алгоритму є матриця Q' розмірністю $(2^n - (n+1)) \times n$, кожен з рядків якої являє собою унікальну комбінацію спільних дефолтів не менш ніж двох підприємств.

Наприклад, для 4-х підприємств позичальників матриця Q матиме розмірність 16×4 , а матриця Q' – лише 11×4 , що є скороченням кількості рядків приблизно на одну третину.

В цілому, наявність такого конструктивного алгоритму дозволить автоматизувати процес відбору комбінацій спільних дефолтів, що суттєво зменшить трудомісткість цього процесу та підвищить ефективність аналізу підприємств-позичальників.

Розв'яжемо ще одну комбінаторну задачу. Визначимо кількість варіантів комбінацій дефолтів двох позичальників за умов, що спільний дефолт декількох позичальників дійсно мав місце.

Нагадаємо, що загальна кількість варіантів спільних дефолтів визначається за формулою (2). Нехай, наприклад, мав місце спільний дефолт трьох позичальників. Кожний варіант дефолту трьох позичальників містить величину C_3^2 парних дефолтів. Тоді, кількість парних дефолтів за умов, що відбувся дефолт будь-яких трьох із n позичальників дорівнюватиме $C_n^3 \cdot C_3^2$.

Відповідно, загальна кількість варіантів парних дефолтів за умов, що спільний дефолт відбувся, визначатиметься за формулою:

$$M_2 = C_n^2 + C_n^3 \cdot C_3^2 + C_n^4 \cdot C_4^2 + \dots + C_n^n \cdot C_n^2 = \sum_{i=2}^n C_n^i \cdot C_i^2. \quad (4)$$

У загальному випадку, кількість варіантів одночасного дефолту k підприємств за умов, що спільний дефолт відбувся, по аналогії з виразом (4) визначатиметься за формулою:

$$M_k = C_n^k + C_n^{k+1} \cdot C_{k+1}^k + \dots + C_n^n \cdot C_n^k = \sum_{i=k}^n C_n^i \cdot C_i^k. \quad (5)$$

Отриманий вираз (5) дозволяє переоцінити потужність множини спільного дефолту визначеної кількості позичальників за умов коли відомо, що в цілому спільний дефолт точно відбувся.

Зазначимо, що наведені вирази (2) та (4) відповідають найбільш масовому варіанту спільних дефолтів – парним дефолтам, які досить часто зустрічаються у практиці фінансових ринків. Зменшити потужність множини спільних дефолтів можна шляхом введення обмежень на мінімальну кількість необхідних індивідуальних дефолтів. Для цього у

формулах (3) та (5) введено параметр k , який дозволяє суттєво скоротити кількість комбінацій, що аналізуються.

Висновки. Розв'язавши комбінаторну задачу аналізу варіантів спільних дефолтів, наприкінці необхідно підкреслити, що, зі збільшенням кількості об'єктів аналізу (позичальників або боргових інструментів), загальна кількість комбінацій автономних дефолтів зростає дуже швидко, отже їх аналіз в аспекті спільного дефолту стає трудомісткою задачею, яка вимагає застосування сучасних інформаційних технологій та засобів обчислювальної техніки. Якщо ж переходити від оцінювання загальної кількості комбінацій дефолтів підприємств безпосередньо до економіко-математичного аналізу окремих варіантів дефолтів, на наш погляд, перспективним є застосування методів кореляційного аналізу, який передбачає визначення відповідних парних, частинних та множинних коефіцієнтів кореляції.

Література

1. Cauoette J. V., Altman E. I., Narayanan P. Managing credit risk: The next great financial challenge. – L.: John Wiley & Sons, Inc., 1998.
2. Інтернет-ресурси: <http://www.moodys.com>.
3. Інтернет-ресурси: <http://www.fitchratings.com>.
4. Інтернет-ресурси: <http://www.standardandpoors.ru>.
5. Камінський А.Б. Моделювання фінансових ризиків: Монографія. – К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2006. – 304 с.
6. Кишакевич Б.Ю. Використання кореляції активів у моделюванні кредитного ризику портфеля // Науковий вісник НЛТУ України. – Зб. науково-технічних праць. – 2009. – Вип. 19.8. – с. 235-240.
7. Долінський Л.Б. Моделювання дефолтів за облігаційними позиками. // Фінанси України. – 2009. – № 4. – с. 65-74.
8. Долінський Л.Б. Імовірнісні моделі спільного дефолту позичальників. // Фінанси України. – 2010. – № 10 – с. 73-80.
9. Постанова Кабміну №665 від 26.04.2007 «Про затвердження Національної рейтингової шкали». – електронний документ, режим доступу: <http://www.rada.gov.ua>